На правах рукописи
УДК 517

Пузанкова Евгения Александровна

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

01.01.01. --- математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
Диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители: $\boxed{\text{д.ф.-м.н., проф. В.В. Дубровский}}$
к.ф.-м.н., проф. М.В. Бушманова

Екатеринбург --- 2003

Научные руководители: --- доктор физико-математических наук, профессор В.В. Дубровский;

--- кандидат физико-математических наук, профессор М.В. Бушманова.

Официальные оппоненты: --- доктор физико-математических наук, профессор И.В. Мельникова;

--- доктор физико-математических наук, профессор Г.В. Хромова.

Ведущая организация --- Институт Математики и Механики Уральского отделения РАН

Защита диссертации состоится «___»___________200 г. в ___ ч. __мин. На заседании диссертационного Совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Уральском государственном университете им.А.М. Горького по адресу: 620083, г. Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомится в научной библиотеке Уральского государственного университета.

Автореферат разослан «__»_______200__г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук,
профессор

В.Г.Пименов

# Общая характеристика работы

**Актуальность проблемы.** Диссертация посвящена решению прямых и обратных задач спектральной теории дифференциальных операторов в частных производных. Многие вопросы математической физики приводят к проблеме спектрального анализа дифференциальных операторов. Характерным подходом в исследовании спектра дифференциальных операторов является изучение *асимптотики спектральной функции* и вычисление *регуляризованных следов*. Поскольку для неограниченных операторов спектральный и матричный следы не существуют, возникает понятие так называемых "регуляризованных следов". Проблема вычисления регуляризованных следов восходит к работе И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана [5], опубликованной в 1953 г. Они рассмотрели оператор Штурма–Лиувилля, порожденный краевой задачей:

$$\begin{aligned} -y''(x) + q(x)y(x) = \mu y(x),& \\ y(0) = y(\pi) = 0, \qquad & x \in [0,\pi], \end{aligned} \tag{1}$$

где $q(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[0,\pi]$. Асимптотика упорядоченных по возрастанию собственных чисел этого оператора выражается формулой

$$\mu_n = n^2 + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi q(x)dx + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \tag{2}$$

В силу этого ряд (*первый регуляризованный след оператора*)

$$\sum_{n=1}^\infty \Big(\mu_n - n^2 - c_0\big), \quad \text{где } c_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi q(x)dx$$

сходится. И.М. Гельфандом и Б.М. Левитаном в [5] была установлена следующая формула:

$$\sum_{n=1}^\infty (\mu_n - n^2 - c_0) = \frac{1}{2}c_0 - \frac{q(0)+q(\pi)}{4}. \tag{3}$$

В работе [7] Л.А. Диким было показано, что формула (3) эквивалентна абстрактному равенству

$$\sum_{n=1}^\infty (\mu_n - n^2 - (qv_n, v_n)) = 0, \tag{4}$$

где скалярное произведение рассматривается в пространстве $L_2[0,\pi]$, $v_n$ — собственные ортонормированные функции оператора, порожденного краевой задачей

$$-v''(x) = \lambda v(x),$$

$$v(0) = v(\pi) = 0, \quad x \in [0,\pi].$$

В 60-е годы теория регуляризованных следов регулярных обыкновенных дифференциальных операторов была практически завершена работами В.Б. Лидского и В.А. Садовничего [14], [17]. Им удалось вычислить регуляризованные следы произвольных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений любых порядков со сложным вхождением параметра.

Значительно менее исследованными являются классы операторов, содержащие дифференцирование по нескольким переменным. Различные результаты в этом направлении были получены в работах А.Г. Костюченко [12], М.Г. Гасымова [3], В. Гийемина [22] и др. Трудность задачи состоит в том, что для уравнений с частными производными резольвента имеет сложное строение и неизвестна точная асимптотика всех собственных чисел. В работе В.В. Дубровского [8] предложен подход к проблеме следов через поправки теории возмущений.

Проблеме вычисления асимптотики спектральной функции дифференциальных и псевдодифференциальных самосопряженных операторов посвящены работы многих математиков (см., например, [11], [20]). С помощью методики, предложенной М.Г. Гасымовым в работе [3], можно вычислять регуляризованные следы дискретных самосопряженных операторов, используя их спектральную функцию. В работе В.А. Садовничего, В.В. Дубровского, А.В. Нагорного [19] изучено асимптотическое поведение спектральной функции самосопряженного оператора с дискретным спектром с применением методов теории возмущений. Пусть на области $M$ задан полуограниченный снизу самосопряженный дискретный оператор $T$, действующий в $H = L_2(M)$. Обозначим через $\lambda_j$ его собственные значения, занумерованные в порядке возрастания (с учетом кратности), а через $v_j(x)$ — соответствующие собственные функции, образующие ортонормированную систему. *Спектральной функцией* оператора назовем функцию

$$\Theta(x,y,\lambda) = \sum_{\lambda_j \le \lambda} v_j(x)\overline{v_j(y)}.$$

Пусть $P$ — самосопряженный ограниченный оператор в $H$. В [19] определены условия, при которых верно следующее равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|\Theta_{T+P}(x,y,\lambda)-\Theta_T(x,y,\lambda)\|_2=0, \tag{5}$$

где $\Theta_{T+P}$ и $\Theta_T$ — спектральные функции операторов $T$ и $T+P$, соответственно.

Особый интерес представляют операторы, полученные из оператора Лапласа в результате "малого"возмущения, поэтому требуется получить асимптотику спектральной функции, а также регуляризованный след для данного оператора. Однако полученный результат (5) переносится только на степень оператора Лапласа $\beta\geq 3/2$. Естественным образом встает задача о нахождении асимптотики спектральной функции и регуляризованного следа для степени оператора Лапласа как можно более близкой к единице.

Наряду с "прямыми"задачами, важную роль играют *обратные задачи спектральной теории дифференциальных операторов.* Под обратными задачами спектрального анализа понимают задачи восстановления оператора по тем или иным его спектральным характеристикам: спектрам (при различных граничных условиях), спектральной функции распределения, и другие. Что касается проблемы существования, то до настоящего времени нет критериев глобального решения этого вопроса, что связано со значительными трудностями в исследовании уравнений, как правило нелинейных, к которым сводятся обратные задачи. Следует заметить, что вообще говоря, многие обратные задачи имеют неединственное решение. Поэтому одним из основных моментов в исследовании проблемы единственности некорректных обратных задач является выявление дополнительных условий, накладываемых на решения, обеспечивающих их единственность.

Наиболее полные результаты в теории обратных задач получены для дифференциального оператора Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} -y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x), \\ y'(a)-hy(a)=0,\ y'(b)+Hy(b)=0 \end{cases} \tag{6}$$

в случае, когда функция $q(x)$ непрерывна на конечном отрезке $[a,b]$. Первый результат в этом направлении принадлежит В.А. Амбарцумяну [21]. Им доказано, что если собственные значения задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} -y''+q(x)y=\lambda y \quad (q(x)\in C[0,\pi]), \\ y'(0)=y'(\pi)=0, \end{cases} \tag{7}$$

суть $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то $q(x) \equiv 0$. Однако, в общем случае один спектр оператора Штурма–Лиувилля функцию $q$ (то есть оператор) не определяет. В работе [4] И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана был указан метод восстановления оператора Штурма–Лиувилля по спектральной функции распределения $\rho(\lambda)$ и указаны достаточные условия для того, чтобы заданная монотонная функция являлась спектральной функцией распределения оператора Штурма–Лиувилля (на прямой или на конечном промежутке). В дальнейшем работа И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана [4] послужила образцом для эффективного решения других обратных задач.

Обратным задачам для уравнений с частными производными и их приложениям посвящено достаточно много работ. В многомерном случае обратные задачи исследовались А.М.Бухгеймом, М.М.Лаврентьевым, В.Г.Романовым и др. (см. [1], [13], [15]). В работе В.А. Садовничего и В.В. Дубровского [18] доказана теорема единственности решения обратной задачи для абстрактных операторов только по одному спектру и при условии "малости"возмущающего оператора. Результаты применяются к степени оператора Лапласа, заданного на прямоугольнике $\Pi$ с потенциалом из $L_2(\Pi)$. К этой работе по своей тематике и методам примыкают работы [9], [10]. Рассмотрим в $L_2(\Pi)$ оператор $T$, порожденный краевой задачей Дирихле:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \\ u \mid_{\partial\Pi} = 0, \end{cases}$$

где $\Delta$ — оператор Лапласа, $\partial\Pi$ — граница прямоугольника $\Pi = \{(x, y) \mid \ 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\}$, ($\frac{a^2}{b^2}$ — иррационально). Введем оператор $T_\beta = \int\limits_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$. Пусть $P$ — оператор умножения на некоторую функцию $p$ (назовем ее *потенциалом*). В [9] разработан метод восстановления потенциала из $C(\Pi)$ и доказана его единственность для оператора $T_\beta + P$. В [10] аналогичная задача решена в классе потенциалов из $L_2(\Pi)$. Однако данные результаты получены в лучшем случае для степени оператора Лапласа $\beta > 5/2$. Таким образом, как и в "прямых"задачах, важным является решение обратной задачи для степени оператора Лапласа как можно более близкой к единице. В силу сказанного, тема исследования данной диссертации является актуальной.

**Цель работы:**

1. Исследовать асимптотику спектральной функции и вычислить первый регуляризованный след оператора $T_\beta + P$, для $\beta$, возможно более близкой к единице.

2. Решить обратную задачу для степени $\beta$ оператора Лапласа, возможно более близкой к единице, заданного либо на прямоугольнике, либо на $N-$ мерном параллелепипеде, с потенциалом из $L_\infty$.

**Методы исследования.** В работе используются методы теории возмущений, спектральной теории операторов, различные методы функционального анализа, теории функций комплексного переменного.

**Научная новизна.** Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Для возмущенной степени оператора Лапласа $T_\beta + P$, заданного на квадрате или на равнобедренном прямоугольном треугольнике, при $\beta > 1\frac{13}{80}$ доказана теорема об оценке разности спектральных функций операторов $T_\beta + P$ и $T_\beta$.

2. Получена формула первого регуляризованного следа для оператора $T_\beta + P$ при $\beta > 1\frac{13}{80}$.

3. При $\beta > 1$ решена обратная задача спектрального анализа о восстановлении потенциала для возмущенной степени оператора Лапласа, заданного на прямоугольнике.

4. При $\beta > N/2$ решена задача восстановления потенциала для возмущенной степени оператора Лапласа на $N-$ мерном параллелепипеде.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут найти применение в квантовой механике, в нелинейных уравнениях математической физики, в спектральной теории операторов, в вычислительной математике.

**Апробация работы и публикации.** Результаты диссертации докладывались и обсуждались на Всероссийских научно-практических конференциях вузов Уральской зоны (г. Магнитогорск, 1999 г., г.Челябинск, 2001 г.), на конференции по математическому моделированию и краевым задачам в СГТУ (г. Самара, 2000 г.), на научно-исследовательском семинаре под руководством доктора физико-математических наук, профессора Дубровского В.В., в Магнитогорском государственном университете (г. Магнитогорск, 1996—2000 г.), на 62-й научно-технической конференции в МГТУ (г. Магнитогорск, 2003 г.), а также на семинаре по дифференциально - операторным уравнениям под руководством доктора физико-математических наук, профессора Мельниковой И.В. в Уральском государственном университете.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [23] — [29]. Выступление автора на конференциях отражено в тезисах докладов [30] — [33]. Из работ, опубликованных в соавторстве, в диссертацию вошли только результаты автора.

**Структура диссертации** Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы из 98 наименований. Общий объем диссертации — 92 страницы.

# Краткое содержание диссертации

Во введении дается обзор работ, связанных с темой диссертации, и формулируются основные результаты диссертации.

**Первая глава** состоит из трех параграфов и посвящена изучению асимптотики спектральной функции возмущенной степени оператора Лапласа, заданной на квадрате или на равнобедренном прямоугольном треугольнике П, с краевыми условиями Дирихле и действующей в пространстве $L_2(\Pi)$. Пусть П — равнобедренный прямоугольный треугольник или квадрат из $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим в $L_2(\Pi)$ оператор $T$, порожденный краевой задачей Дирихле:

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi, \quad u\Big|_{\partial\Pi} = 0,$$

где $\partial\Pi$ — граница П, $\Delta$ — оператор Лапласа. Введем оператор $T_\beta = \int\limits_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора $T$, $\beta > 0$. Пусть $P$ — самосопряженный ограниченный оператор, действующий в $L_2(\Pi)$. Обозначим через $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ собственные числа операторов $T_\beta$ и $T_\beta + P$ соответственно, занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности; через $v_n$ и $u_n$

— ортонормированные собственные функции операторов $T_\beta$ и $T_\beta+P$ соответственно, отвечающие $n-$м собственным числам.

Первый параграф главы I носит реферативный характер. В нем, согласно [16], [6], приведены различные спектральные свойства самосопряженных дискретных операторов. Во втором параграфе, используя два члена асимптотики собственных чисел оператора Лапласа, а также результаты о числе целых точек в круге, доказаны свойства собственных чисел оператора $T_\beta$.

Для собственных чисел оператора $T_\beta$ верна следующая асимптотика:

$$\lambda_n = C_1 n^\beta + C_2 n^{\beta-1/2} + O(n^{\beta-27/40}), \tag{8}$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ — некоторые константы.

**Теорема 1.** *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ *— собственные числа оператора* $T_\beta$. *Если* $|k-n| \geq C_3 n^{13/40+\delta}$, *где* $C_3 > 0$, $0 < \delta \leq 27/40$, *тогда*

$$|\lambda_k - \lambda_n| \geq const \cdot \max\{k^{\beta-27/40+\delta}, n^{\beta-27/40+\delta}\},\ const > 0 \tag{9}$$

В третьем параграфе сформулирована и доказана основная теорема данной главы — об оценке разности спектральных функций операторов $T_\beta$ и $T_\beta+P$. Пусть $\{\lambda_{n_m}\}_{m=1}^\infty$ — такая подпоследовательность собственных чисел оператора $T_\beta$, что

$$\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} \geq C_1 n_m^{\beta-1}, \tag{10}$$

где $C_1$ — некоторая положительная постоянная (см.[8]).

**Теорема 2.** *Пусть* $T_\beta$ *— степень оператора Лапласа, заданного на* П, $P$ *— самосопряженный ограниченный оператор. Если* $(\beta-1)(k+1) > 13/80$, $1 \leq q \leq 2$, *тогда имеет место равенство:*

$$\sum_{j=1}^{n_m} u_j(x)\overline{u_j(y)} = \sum_{j=1}^{n_m} v_j(x)\overline{v_j(y)} + \sum_{l=1}^{k} \alpha_l(x,y,n_m) + \varphi_{k+1}(x,y,n_m)\ , \tag{11}$$

*причем*

$$\lim_{m\to\infty} \|\varphi_{k+1}(x,y,n_m)\|_q = 0.$$

*Здесь* $\alpha_l(x,y,n_m)$ *и* $\varphi_{k+1}(x,y,n_m)$ *— поправки теории возмущений.*

**Следствие 1.** *Пусть* $\Theta_{T_\beta+P}(x,y,\lambda) = \sum\limits_{\mu_k\leq\lambda} u_k(x)\overline{u_k(y)}$, $\Theta_{T_\beta}(x,y,\lambda) = \sum\limits_{\lambda_k\leq\lambda} v_k(x)\overline{v_k(y)}$ *— спектральные функции операторов* $T_\beta+P$ *и* $T_\beta$ *соответственно. Если* $\beta > 1\frac{13}{80}$, $1 \leq q \leq 2$ *и* $\lambda \in (\lambda_{n_m} + \|P\|, \lambda_{n_m+1} -$

$\|P\|$), *то имеет место соотношение:*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|\Theta_{T_\beta+P}(x,y,\lambda)-\Theta_{T_\beta}(x,y,\lambda)\|_q=0.$$

Используя полученный результат и методику, предложенную М.Г. Гасымовым (см. [3]), удалось вычислить первый регуляризованный след для этих операторов. Задача решена для степени $\beta>1\frac{13}{80}$.

**Теорема 3.** *Пусть* $\beta>1\frac{13}{80}$, $P$ *— оператор умножения на вещественную функцию* $p\in L_\infty(\Pi)$. *Тогда*

$$\lim_{n_m\to\infty}\sum_{j=1}^{n_m}(\mu_j-\lambda_j-(Pv_j,v_j))=0.$$

**Вторая глава** состоит из пяти параграфов и посвящена решению обратной задачи спектрального анализа для степени оператора Лапласа с потенциалом из $L_\infty$, заданного на прямоугольнике либо на $N-$ мерном параллелепипеде. Для решения задачи используется принцип сжимающих отображений. В первом параграфе вводятся необходимые операторы и на потенциалы накладываются дополнительные условия: симметричности и равенства нулю некоторых коэффициентов Фурье. Обозначим $\Pi=\{(x,y)\mid 0\le x\le a, 0\le y\le b\}$ — прямоугольник, где $a>0,\ b>0$; $\frac{a^2}{b^2}$ — иррационально; $\Pi_4=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le\dfrac{a}{2}, 0\le y\le\dfrac{b}{2}\right\}$ — вспомогательный прямоугольник. Пусть оператор $T_\beta$ — степень оператора Лапласа, заданного на прямоугольнике $\Pi$, с краевыми условиями Дирихле. Пусть $P$ — оператор умножения на, вообще говоря, комплекснозначную, измеримую по Лебегу, существенно ограниченную по модулю функцию $p(x,y)$ с областью определения $\Pi$ (эту функцию мы будем называть *потенциалом*). Допустим, что потенциал удовлетворяет еще двум дополнительным условиям:

$$p(a-x,y)=p(x,y)=p(x,b-y)\quad\text{для почти всех}(x,y)\in\Pi,\qquad(12)$$

$$\iint\limits_{\Pi}p(x,y)\cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)dxdy=$$
$$=\iint\limits_{\Pi}p(x,y)\cos\left(\frac{2\pi ny}{b}\right)dxdy=0,\ m,n=0,1,\dots,\infty.\qquad(13)$$

Обозначим через $\mu_k$ собственные числа оператора $T_\beta + P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности, $k = 1, 2, \ldots, \infty$; $u_k$ — соответствующие ортонормированные собственные функции этого оператора. В первом параграфе также сформулирована теорема Л. Карлесона об интерполяции [2, с.285], используемая в дальнейшем.

Во втором параграфе получена важная оценка ядерной нормы оператора $(T_\beta - \lambda E)^{-1}$, которая будет использована при дальнейшем решении обратной задачи. Пусть $\{\lambda_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ — такая подпоследовательность собственных чисел оператора $T_\beta$, что выполняется (10).

**Теорема 4 (Оценка ядерной нормы оператора $(T_\beta - \lambda E)^{-1}$).** *Пусть* $0 < \delta < 1$; $(1-\delta)(\beta - 1/2) < 1$, *тогда на вертикальных прямых* $\Gamma_{k_l} = \left\{ \lambda \mid \lambda = \dfrac{\lambda_{k_l} + \lambda_{k_l+1}}{2} + i\rho \right\}$ *выполняется неравенство*

$$\|(T_\beta - \lambda E)^{-1}\|_1 \equiv \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda - \lambda_k|^{-1} \le \left( |\rho| + C_5 k_l^{\beta-1} \right)^{-\delta} o\left( k_l^{1/2-(1-\delta)(\beta-1)} \right) +$$
$$+ \left( |\rho| + C_5 k_l^{\beta-1/2} \right)^{-\delta} O\left( k_l^{1-(1-\delta)(\beta-1/2)} \right), \quad C_5 > 0. \qquad (14)$$

В третьем параграфе сформулирована и доказана локальная теорема существования в обратной задаче спектрального анализа для степени оператора Лапласа $\beta > 3/2$, заданного на прямоугольнике. При доказательстве используется оценка ядерной нормы оператора $(T_\beta - \lambda E)^{-1}$ и теорема Л. Карлесона об интерполяционной последовательности, сформулированная в первом параграфе. Пусть $\{\lambda_{k_s}\}_{s=1}^{\infty}$ - интерполяционная последовательность в смысле Л. Карлесона спектра $\sigma(T_\beta)$ оператора $T_\beta$ в правой полуплоскости $Re\lambda > 0$, то есть существует такое число $\tau = \tau(\{\lambda_{k_s}\}) > 0$, что

$$\prod_{j=1, j\ne s}^{\infty} \left| \frac{\lambda_{k_s} - \lambda_{k_j}}{\lambda_{k_s} + \lambda_{k_j}} \right| \ge \tau, \text{ для любого } s = \overline{1, \infty}.$$

Тогда по теореме Л. Карлесона существуют такие аналитические, ограниченные в совокупности в правой полуплоскости функции, что

$$f_{k_s}(\lambda_{k_j}) = \delta_{js},$$

$$\|f_{k_s}\|_\infty = \sup_{Re\lambda > 0} |f_{k_s}(\lambda)| \le \frac{c}{\tau}(1 - \ln \tau),$$

где $\delta_{js}$ - символ Кронекера. Положим $\varphi_{k_s}(\lambda) = \int\limits_0^\lambda f_{k_s}(z)\,dz$.

Обозначим

$$\psi_{k(m,n)}(x,y) = \frac{4}{\sqrt{ab}} \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi n y}{b}\right),\ m,n = \overline{1,\infty}, \qquad (15)$$

где функции занумерованы в соответствии с собственными числами $\lambda_{k(m,n)} = \left(\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2}\right)^\beta$ оператора $T_\beta$.

**Теорема 5.** *Пусть $\frac{a^2}{b^2}$ — иррациональное число, степень оператора Лапласа $\beta > 3/2$, $\{\lambda_{k_s}\}_{s=1}^\infty$ — интерполяционная последовательность. Тогда существует $\varepsilon > 0$, зависящее от $\tau = \tau(\{\lambda_{k_s}\}) > 0$, такое, что если для произвольной последовательности $\{\xi_s\}$ выполняется неравенство*

$$\sqrt{ab}\|\sum_{s=1}^\infty \xi_s \psi_{k_s}\|_\infty < \varepsilon, \qquad (16)$$

*то в замкнутом шаре $U(0,\varepsilon) \subset L_\infty(\Pi)$ , существует один и только один потенциал $p(x,y)$, удовлетворяющий условиям (12), (13) и*

$$\iint\limits_{\Pi_4} p(x,y)\psi_k(x,y)\,dxdy = 0 \text{ при } k \neq k_s,\ k = 1,2,\dots,\infty,$$

*такой, что собственные числа $\mu_j$ оператора $T_\beta + P$ удовлетворяют соотношениям*

$$\sum_{j=1}^{k_{l_q}} \varphi_{k_s}(\mu_j) - \sum_{j=1}^{k_{l_q}} \varphi_{k_s}(\lambda_j) = \xi_s,\ s = 1,2,\dots,\infty,\ k_{l_q-1} < k_s \le k_{l_q}.$$

*Здесь $\{k_{l_q}\}$ — подпоследовательность натуральных чисел, выбираемая специальным образом.*

В четвертом параграфе доказана теорема о восстановлении потенциала для степени оператора Лапласа $\beta > 1$. Кроме того, удалось ослабить ограничения, накладываемые на потенциал: на него наложены только условия симметрии. Таким образом, удалось существенно усилить ранее полученные результаты ([9], [10]).

Пусть оператор $T_\beta$ — степень оператора Лапласа, заданного на прямоугольнике П граничными условиями Дирихле, $P$ — оператор умножения на вещественную , измеримую по Лебегу, существенно ограниченную функцию $p(x,y)$ с областью определения П. Допустим, что функция $p(x,y)$ удовлетворяет еще двум ограничениям:

$$p(a-x,y) = p(x,y) = p(x,b-y) \tag{17}$$

для почти всех $(x,y) \in \Pi$ и

$$\iint\limits_{\Pi} p(x,y)\, dxdy = 0. \tag{18}$$

Введем целые, ограниченные по модулю (но не в совокупности) в правой полуплоскости $Re\lambda > 0$ функции $f_k(\lambda)$, такие, что

$$f_k(\lambda_j) = \delta_{jk}, \quad s_k = \sup_{Re\lambda>0} (|f_k(\lambda)| \cdot |\lambda|^2) < \infty,$$

где $\delta_{jk}$ - символ Кронекера, $j,k = 1,2,\ldots,\infty$. Положим

$$\varphi_k(\lambda) = \int\limits_0^\lambda f_k(z)\, dz.$$

Последовательность $\xi_k = \sum\limits_{\mu_j \le b_{n_l}} \varphi_k(\mu_j) - \sum\limits_{\lambda_j \le b_{n_l}} \varphi_k(\lambda_j)$ может быть представлена в виде

$$\xi_k = \alpha_m + \tau_n + \gamma_{m,n}, \tag{19}$$

где

$$\sum_{m=1}^\infty |\alpha_m|^2 < \infty, \ \sum_{n=1}^\infty |\tau_n|^2 < \infty, \ \sum_{m,n=1}^\infty |\gamma_{m,n}|^2 < \infty.$$

Здесь $b_{n_l}$ — некоторая подпоследовательность положительных чисел, выбираемая специальным образом по спектру оператора $T_\beta$, $b_{n_l} \to \infty$ при $l \to \infty$.

**Теорема 6.** *Пусть $\beta > 1$, $a^2/b^2$ — иррациональное число, $\{\xi_k\}$ — последовательность вида (19), для которой выполняется неравенство*

$$\|\sum_{k=1}^\infty (\xi_k - \alpha_m - \tau_n)\, \psi_k\|_\infty \le \varepsilon.$$

*Тогда в шаре*

$$U(0,\varepsilon)=\{p(x,y)\mid \|p\|_\infty\le\varepsilon\}$$

*существует один и только один потенциал* $p$, *удовлетворяющий условиям(17), (18) такой, что собственные числа* $\mu_j$ *оператора* $T_\beta+P$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\sum_{\mu_j\le b_{n_l}}\varphi_k(\mu_j)-\sum_{\lambda_j\le b_{n_l}}\varphi_k(\lambda_j)=\xi_k,$$

*при* $\lambda_k\le b_{n_{(l-1)}}$, $k=1,2,\dots\infty$.

.

В пятом параграфе задача о восстановлении потенциала для степени оператора Лапласа рассмотрена на $N-$ мерном параллелепипеде и теорема доказана для степени оператора Лапласа $\beta>N/2$.

Обозначим

$$\Pi_N=\{x=(x_1,x_2,\dots,x_N)\mid 0\le x_j\le a_j,\ j=\overline{1,N}\}$$

— $N-$мерный параллелепипед.Пусть оператор $T_\beta$ — степень оператора Лапласа, заданного на прямоугольнике $\Pi_N$ граничными условиями Дирихле; $P$ — оператор умножения на вещественную, измеримую по Лебегу, существенно ограниченную функцию $p$ с областью определения $\Pi_N$ . Допустим, что потенциал удовлетворяет еще двум ограничениям:

$$\begin{aligned}p(a_1-x_1,x_2,\dots,x_N)&=p(x_1,a_2-x_2,\dots,x_N)=\\&=p(x_1,x_2,\dots,a_N-x_N)=p(x_1,x_2,\dots,x_N)\end{aligned}\tag{20}$$

для почти всех $(x_1,\dots,x_N)\in\Pi_N$ и

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Pi_N}\!\cdots\!\int p(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N=\\&=\int\limits_{\Pi_N}\!\cdots\!\int p(x_1,\dots,x_N)\cos\left(\frac{2\pi m_{j_k}x_{j_k}}{a_{j_k}}\right)\,dx_1\dots dx_N=\dots\\&=\int\limits_{\Pi_N}\!\cdots\!\int p(x_1,\dots,x_N)\prod_{k=1}^{N-1}\cos\left(\frac{2\pi m_{j_k}x_{j_k}}{a_{j_k}}\right)\,dx_1\dots dx_N=0,\end{aligned}\tag{21}$$

где $j_k \in \{1,2,\dots,N\}$, $\quad j_k \neq j_p$ при $k \neq p$, $m_{j_k} \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$\psi_{k(m)}(x_1,\dots,x_N) = \frac{2^N}{\sqrt{a_1 a_2 \dots a_N}} \prod_{j=1}^{N} \cos\left(\frac{2\pi m_j x_j}{a_j}\right) \qquad (22)$$

где $m = (m_1, m_2, \dots, m_N)$ — мультииндекс, $m_j \in \mathbb{N}$ $\;(j = \overline{1,N})$ функции $\{\psi_{k(m)}\}$ занумерованы одним индексом $k$ в соответствии с собственными числами оператора $T_\beta$

$$\lambda_k = \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\pi^2 m_i^2}{a_i^2}\right)\right)^{\beta}.$$

**Теорема 7.** *Пусть $\beta > N/2$, $a_j^{-2}$ (j=1,...,N) линейно независимы над полем рациональных чисел, $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность чисел, удовлетворяющих неравенству*

$$\sqrt{A}\|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\psi_k\|_\infty \leq \varepsilon(1-\sqrt{A}\delta\varepsilon), \qquad (23)$$

*где число $\delta = \delta(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству $\sqrt{A}\delta\varepsilon < 1$ $(A = \prod_{j=1}^{N} a_j)$. Тогда в шаре $U(\varepsilon) = \{p(x_1,\dots,x_N) \mid \|p\|_\infty \leq \varepsilon\}$ существует один и только один потенциал $p$, удовлетворяющий условиям(20), (21) такой, что собственные числа $\mu_j$ оператора $T_\beta + P$ удовлетворяют соотношениям*

$$\sum_{\mu_j \leq b_{n_l}} \varphi_k(\mu_j) - \sum_{\lambda_j \leq b_{n_l}} \varphi_k(\lambda_j) = \xi_k, \qquad (24)$$

*при $\lambda_k \leq b_{n_{(l-1)}}$ $(k = 1, 2, \dots \infty)$.*

# Список литературы


[1] Бухгейм А.Л. Введение в теорию обратных задач. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.

[2] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.

[3] Гасымов М.Г. О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов // ДАН СССР. 1963. Т.150, $N$ 6. С.1202–1205.

[4] Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции.// Изв.АН СССР, сер. мат. 1951. Т.15. С.309–360.

[5] Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка //ДАН СССР. 1953. Т. 88, $N$ 4. С. 593–596.

[6] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

[7] Дикий Л.А. Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма – Лиувилля //УМН. 1958. Т.13, $N$ 3. С. 111–143.

[8] Дубровский В.В. О формулах регуляризованных следов самосопряженных эллиптических дифференциальных операторов второго порядка //Дифференц. уравнения. 1984. Т.20, $N$ 11. С. 1995–1998.

[9] Дубровский В.В., Нагорный А.В. К обратной задаче для оператора Лапласа с непрерывным потенциалом //Дифференц. уравнения. 1990. Т.26, $N$ 9. С.1563–1567.

[10] Дубровский В.В., Нагорный А.В. Обратная задача для степени оператора Лапласа с потенциалом из $L_2$ //Дифференц. уравнения. 1992. Т.28, $N$ 9. С.1552–1561.

[11] Костюченко А.Г. Асимптотика спектральной функции сингулярного дифференциального оператора порядка $2m$ //ДАН СССР. 1966. Т.168, $N$ 2. С. 276–279.

[12] Костюченко А.Г. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов //Матем. заметки. 1967. Т.1, $N$ 3. С. 365–378.

[13] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциалных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969.

[14] Лидский В.Б., Садовничий В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций //ДАН СССР. 1967. Т.176, $N$ 2. С.259–262.

[15] Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.

[16] Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.

[17] Садовничий В.А. Дзета-функция и собственные числа дифференциальных операторов //Дифференц. уравнения. 1974. Т.10, $N$ 4. С.1276–1285.

[18] Садовничий В.А., ДубровскийВ.В. О некоторых свойствах операторов с дискретным спектром //Дифференц. уравнения. 1979. Т.15, $N$ 7. С.1206–1211.

[19] Садовничий В.А., Дубровский В.В., Нагорный А.В. Асимптотика спектральной функции оператора с дискретным спектром в $L^p$.//Труды семинара им.И.Г.Петровского. 1991. Вып.16. С.182–185.

[20] Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.3(Псевдодифференциальные операторы).М.:Мир, 1987.

[21] Ambarcumian V.A. Ueber eine Frage der Eigengwerttheorie // Zeits.f. Phisik. 1929. $N$ 53. S. 690–695.

[22] Guillemin V. Some spectral results for the Laplace operator with potential on the $n$-sphere //Adv. math. 1978. V.27, $N$ 3. P. 273–286.

# Список работ автора по теме диссертации

[23] Дубровский В.В., Пузанкова Е.А. Оценка разности спектральных функций степени оператора Лапласа, заданного на треугольнике, в $L_p$ при $1 \leq p \leq 2$// ДАН. 1999. Т.365, $N$ 3. С.311–313.

[24] Дубровский В.В., Пузанкова Е.А. Оценка разности спектральных функций и формулы регуляризованных следов степени оператора Лапласа, заданного на треугольнике или квадрате, в $L_p$, $1 \leq p \leq 2$.// Дифференц. уравнения. 1999. Т.35, $N$ 4. С.1–4

[25] Садовничий В.А., Дубровский В.В., Пузанкова Е.А. Об обратной задаче спектрального анализа для степени оператора Лапласа с потенциалом.// ДАН. 1999. Т.367, $N$ 3. С.307–309.

[26] Садовничий В.А., Дубровский В.В., Пузанкова Е.А. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на прямоугольнике.// Дифференц. уравнения. 2000. Т.36, $N$ 12. С. 1695–1698.

[27] Садовничий В.А., Дубровский В.В., Дубровский В.В.-мл., Пузанкова Е.А. О восстановлении потенциала в обратной задаче спектрального анализа.// ДАН. 2001. Т.380, $N$ 4. С.462–464.

[28] Пузанкова Е.А. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа с потенциалом в пространстве $\mathbb{R}^N$ .// Деп. в НИИ ВО 27.02.02 $N$ 18–2002. 8с.

[29] Пузанкова Е.А. Обратная задача спектрального анализа для возмущенного оператора Лапласа.// Математика. Приложение математики в экономических, технических и педегогических исследованиях. Сб. науч. трудов под ред. М.В. Бушмановой. Магнитогорск: МГТУ, 2003. С.16–22.

[30] Пузанкова Е.А. Оценка разности спектральных функций и формулы регуляризованных следов степени оператора Лапласа, заданного на прямоугольном равнобедренном треугольнике или на квадрате// Матер. Всерос. науч.-практич. конф. 16–18 марта 1999г. Проблемы физико-математического образования в педагогических вузах страны на современном этапе. Магнитогорск.: МГПИ., 1999. С.26–27.

[31] Дубровский В.В., Пузанкова Е.А. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на прямоугольнике.// Труды десятой межвузовской конференции "Математическое моделирование и краевые задачи", 29–31 марта 2000 г. Самара, 2000. Часть 3. С.51–53.

[32] Садовничий В.А., Дубровский В.В., Дубровский В.В.-мл., Пузанкова Е.А. О восстановлении потенциала по спектру для степени оператора Лапласа на прямоугольнике. // Тезисы докладов научно-практической конференции вузов Уральской зоны, 26 – 29 марта 2001 г. Челябинск: ЧГПУ, 2001. С.29–30.

[33] Пузанкова Е.А. Восстановление потенциала по спектру для возмущенного оператора Лапласа. // Материалы 62-й научно-технической конференции по итогам научно-исследовательской работы за 2002–2003 гг.: Сб. докл. под ред. Г.С. Гуна. Магнитогорск: МГТУ, 2003. С.219–221.